جلسه ششم درس معادلات ۲ دی ۹۸

نکته ۲: معادله همگن با ضرایب ثابت — حالت خاص — معادله معتبر (مشخصه) مرتبه دوم

" " " " مرتبه n ام

* معادلات ناهمگن

حل معادله ناهمگن با ضرایب ثابت:

$$y''+ay'+by=r(x)$$

$$y=y_h+y_p \rightarrow \text{جواب عمومی معادله ناهمگن}$$

$y_h$: جواب عمومی همگن

$y_p$: جواب خصوصی ناهمگن

حالت اول: اگر $r(x)$ چند جمله‌ای باشد.

در این حالت $y_p$ به صورت

$$y_p=(\text{چند جمله‌ای از درجه } r(x) \text{ با ضرایب مجهول})\,x^m$$

m تعداد ریشه‌های صفر معادله مشخصه

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-y'=2x$ (۱) را بدست آورید.

$$t^2-t=0 \rightarrow t(t-1)=0 \rightarrow t=0,1 \rightarrow y_h=c_1e^{0x}+c_2e^{1x} \quad (1)$$

$$y_p=x^1(Ax+B) \Rightarrow y_p=Ax^2+Bx \rightarrow y_p'=2Ax+B,\ y_p''=2A$$

$$2A-(2Ax+B)=2x \rightarrow$$

ضریب $x$: $-2A=2$ → $\boxed{A=-1}$

ضریب ثابت: $2A-B=0 \rightarrow \boxed{B=-2}$

$$\boxed{y_p=-x^2-2x}$$

$$y=y_h+y_p$$

$$\boxed{y=c_1+c_2e^x+(-x^2-2x)}$$

حالت دوم: اگر $r(x)=M(x)e^{px}$ باشد که $M(x)$ چند جمله‌ای است. در این صورت جواب آخر

$$y_p=x^m(\text{چند جمله‌ای با ضرایب مجهول از درجه } M(x))e^{px}$$

m تعداد ریشه‌های مساوی با p معادله مشخصه است.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-4y'+4y=5e^{2x}$ (۱) را بدست آورید.

$$t^2-4t+4=0 \rightarrow (t-2)^2=0 \rightarrow t=2,2 \rightarrow y_h=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$

در اینجا $p=2$ است

$$y_p \overset{(2)}{=} Ae^{2x}x^2 \Rightarrow y_p'=(2Ae^{2x}x^2+2Axe^{2x})=2Ae^{2x}(x^2+x)$$

$$\rightarrow y_p''=4Ae^{2x}(x^2+x)+2Ae^{2x}(2x+1) \xrightarrow{(1)} Ae^{2x}[4x^2+4x+4x+2]-4Ae^{2x}[-8x^2-8x]+4Ae^{2x}x^2=5e^{2x} \rightarrow Ae^{2x}[\cancel{4x^2}+\cancel{8x}+2-\cancel{8x^2}-\cancel{8x}+\cancel{4x^2}]=5e^{2x}$$

$$\rightarrow 2Ae^{2x}=5e^{2x} \rightarrow 2A=5 \rightarrow \boxed{A=\frac{5}{2}} \xrightarrow{(2)} \boxed{y_p=\frac{5}{2}e^{2x}x^2}$$

$$\boxed{y=y_h+y_p=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+\frac{5}{2}e^{2x}x^2}$$

حالت سوم: اگر $r(x)$ ناهمگن $r(x) = M(x)\cos qx + N(x)\sin qx$ که $M(x)$ و $N(x)$ چندجمله‌ای باشند در این صورت $y_p = x^m[R(x)\cos qx + S(x)\sin qx]$ که $R(x)$ و $S(x)$ چندجمله‌ای‌های از درجه بالاترین درجه بین $M(x)$ و $N(x)$ است. ضرایب مجهول است و $m$ تعداد ریشه‌های $t \pm iq$ معادله مشخصه است.

مثال: شکل جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''+4y = x^2\sin 2x$ را بدست آورید.

$t^2+4=0 \to t^2=-4 \to t=\pm 2i$

$y_p = x^1[(Ax^2+Bx+C)\cos 2x + (A_1x^2+B_1x+C_1)\sin 2x]$

حالت چهارم: اگر $r(x)$ ناهمگن به شکل $r(x) = e^{px}[M(x)\cos qx + N(x)\sin qx]$ باشد آنگاه

$y_p = x^m e^{px}[R(x)\cos qx + S(x)\sin qx]$

$R(x)$ و $S(x)$ چندجمله‌ای‌های از درجه بالاترین درجه بین $M(x)$ و $N(x)$ است $m$ تعداد ریشه‌های $p+iq$ معادله مشخصه است.

مثال: شکل جواب خصوصی معادله $y''-4y'+5y=(x+2)e^{2x}\sin x$ را بدست آورید.

$t^2-4t+5=0 \to \Delta = 16-20=-4 \to t=\frac{4\pm 2i}{2} = 2\pm i$

$y_p = e^{2x}[(A_1x+B_1)\cos x + (A_2x+B_2)\sin x]x^1$

تعداد ریشه‌های $2+i$ برابر 1 است.

تمرین: فقط فرم جواب خصوصی $D(D^2-2D+2)^3(D^2+9)(D+1)^4 y = x^2+x\sin x+3e^{-x}+1+x^2e^{x}\cos x + 5\cos 3x = r(x)$ بنویسید.

$D=0$ و $-1$، $-1$، $-1$، $-1$ و $3i$ و $-3i$ و $1+i$ و $1+i$ و $1+i$ و $1-i$ و $1-i$ و $1-i$

$D^2+9=0 \to D^2=-9 \to D=\pm 3i$

$D^2-2D+2=0 \to \Delta = 4-8=-4 \qquad D = \frac{2\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{2\pm 2i}{2} = 1\pm i$

$r(x) = \underbrace{(x^2+1)}_{\text{حالت اول}} + \underbrace{3e^{-x}}_{\text{دوم}} + \underbrace{x\sin x}_{\text{سوم}} + \underbrace{5\cos 3x}_{\text{سوم}} + \underbrace{x^2e^{x}\cos x}_{\text{چهارم}}$

$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} + y_{p_4} + y_{p_5}$

یک ریشه صفر داریم پس $m=1$ است

$y_{p_1} = (A_1x^2+B_1x+C_1)x^1$

4 تا ریشه $-1$ داریم پس $m=4$ است

$y_{p_2} = e^{-x}A_2x^4$

0 تا ریشه $i$ داریم پس $m=0$ است

$y_{p_3} = [(A_3x+B_3)\cos x + (A_4x+B_4)\sin x]x^0$

1 تا ریشه $3i$ داریم پس $m=1$ است.

$y_{p_4} = [A_5\cos 3x + B_5\sin 3x]x^1$

$y_{p_5} = e^{x}[(A_6x^2+B_6x+C_6)\cos x + (A_7x^2+B_7x+C_7)\sin x]x^3$

سه تا ریشه $1+i$ داریم پس $m=3$ است

مثال: فقط فرم جواب خصوصی معادله $D^2(D^2+4)^3(D-2)y = x\sinh x + \cos^2 x$ را بدست آورید.

$D = 0$ و $0$ و $2i$ و $2i$ و $2i$ و $-2i$ و $-2i$ و $-2i$ و $2$

$$r(x) = x\sinh x + \cos^2 x = x\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) = \frac{1}{2}xe^{x} - \frac{1}{2}xe^{-x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$\frac{1}{2}xe^{x}$ : فرم مربوط به : $y_{p_1} = (A_1x+B_1)e^{x}x^{0}$ (حالت دوم) $m=0$ است زیرا تعداد ریشه های $1$ برابر با صفر است

$-\frac{1}{2}xe^{-x}$ : فرم مربوط به : $y_{p_2} = (A_2x+B_2)e^{-x}x^{0}$ (حالت دوم) $m=0$ است زیرا تعداد ریشه های $-1$ برابر با صفر است

$+\frac{1}{2}$ : فرم مربوط به : $y_{p_3} = A_3x^{2}$ (حالت اول) $m=2$ است زیرا تعداد ریشه های صفر برابر با $2$ است

$\frac{1}{2}\cos 2x$ : فرم مربوط به : $y_{p_4} = [A_4\cos 2x + B_4\sin 2x]x^{3}$ $m=3$ است زیرا تعداد ریشه های $0+2i$ برابر $3$ است

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} + y_{p_4}$$

روش کاهش مرتبه برای حل معادلات همگن

این حالت ضرایب دیگر عدد ثابت نیستند

$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0$ اگر بتوانیم $y_1$ را حدس بزنیم $y_2$ را می توان براساس $y_1$ بدست آورد

$\boxed{y = c_1y_1 + c_2y_2}$ جواب عمومی

$$y_2 = v(x)y_1 = vy_1 \qquad v = \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int f_1(x)\,dx}\, dx$$

حدس اولیه $y_1$:

اگر $f_1(x) + xf_2(x) = 0$ ← $\boxed{y_1 = x}$

اگر $1 + f_1(x) + f_2(x) = 0$ ← $\boxed{y_1 = e^{x}}$

اگر $1 - f_1(x) + f_2(x) = 0$ ← $\boxed{y_1 = e^{-x}}$

اگر $a^2 + af_1(x) + f_2(x) = 0$ ← $\boxed{y_1 = e^{ax}}$ که $a$ عدد ثابت است.

مثال: معادله دیفرانسیل $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$ را حل کنید.

$$\div x^2 \Rightarrow y'' - \underbrace{\frac{x(x+2)}{x^2}}_{f_1(x)}y' + \underbrace{\frac{x+2}{x^2}}_{f_2(x)}y = 0$$

جواب آخر: $y_2 = vy_1 = xe^{x}$

$$\boxed{y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x + c_2xe^{x}}$$

$$f_1(x) + xf_2(x) = -\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x+2}{x^2}\,x = 0 \longrightarrow \boxed{y_1 = x}$$

$$v = \int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int f_1(x)dx}dx = \int \frac{1}{x^2}e^{-\int -\frac{(x+2)}{x}dx}dx = \int \frac{1}{x^2}e^{\int(1+\frac{2}{x})dx}dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2}e^{x+2\ln x}dx = \int \frac{1}{x^2}e^{x}\cdot e^{2\ln x}dx = \int \frac{1}{x^2}e^{x}x^{2}dx = e^{x}$$

مثال: معادله $(x+1)y'' - (2x+3)y' + (x+2)y = 0$ را حل کنید

$$\xrightarrow{\div (x+1)} \quad y'' - \underbrace{\frac{2x+3}{x+1}}_{f_1(x)} y' + \underbrace{\frac{x+2}{x+1}}_{f_2(x)} y = 0$$

$$1 + f_1(x) + f_2(x) = 1 + \left(-\frac{2x+3}{x+1}\right) + \left(\frac{x+2}{x+1}\right) = \frac{\cancel{x}+\cancel{1}-\cancel{2x}-\cancel{3}+\cancel{x}+\cancel{2}}{x+1} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{y_1 = e^x}$$

$$v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f_1(x)\,dx} dx = \int \frac{1}{e^{2x}} e^{-\int -\frac{2x+3}{x+1}dx} dx = \int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int (2+\frac{1}{x+1})dx}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x+3 & x+1 \\ \cline{2-2} -(2x+2) & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$= \int \frac{1}{e^{2x}} e^{2x + \ln(1+x)} dx = \int \frac{1}{\cancel{e^{2x}}} \cancel{e^{2x}} \cdot e^{\ln(1+x)} dx$$

$$= \int (1+x)\,dx = x + \frac{x^2}{2}$$

$$\boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 \left(x + \frac{x^2}{2}\right) e^x}$$

$$\boxed{y_2 = v\, y_1 = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) e^x}$$

فصل ۲:
- حالت خاص
- ضرایب ثابت همگن مرتبه دوم
- " " مرتبه n ام
- ضرایب ثابت ناهمگن مرتبه دوم و مرتبه n ام (امروز)
- معادله همگن ضرایب نا ثابت با روش کاهش مرتبه (امروز)

روش عمومی برای حل معادلات غیرهمگن به عنوان روش تغییر پارامتر (معادلات مرتبه دوم)

در معادله $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x)$ اگر بتوانیم دو جواب عمومی سمت همگن را با عنوان $y_1$ و $y_2$ بدست آوریم

$$\left.\begin{cases} y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ y = y_h + y_p \end{cases}\right\} \rightarrow y_p = u(x)\,y_1 + v(x)\,y_2$$

$$\cancel{\begin{cases} u' y_1 + v' y_2 = 0 \\ u' y_1' + v' y_2' = f_3(x) \end{cases}} \Rightarrow \cancel{u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f_3(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 f_3(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}} \qquad y_1 y_2' - y_2 y_1' = W \quad \text{رونسکین}$$

$$\cancel{v' = \frac{y_1 f_3(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}}$$

$$\boxed{y_p = y_1 \underbrace{\int \frac{-y_2 f_3}{W} dx}_{u} + y_2 \underbrace{\int \frac{y_1 f_3}{W} dx}_{v}}$$

مثال: جواب عمومی $y''+2y'+2y=\frac{e^{-x}}{\cos^3 x}\; f_3(x)$ را بدست آورید.

$t^2+2t+2=0 \quad \Delta=4-8=-4 \quad t=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i$

$y_h=e^{-1x}\left[A\cos x+B\sin x\right]=Ae^{-x}\cos x+Be^{-x}\sin x \rightarrow y_1=e^{-x}\cos x$

$y_2=e^{-x}\sin x$

$y_p=uy_1+vy_2$

$u=\int -\frac{y_2 f_3}{W}dx=\int \frac{-\cancel{e^{-x}}\sin x\times\frac{e^{-x}}{\cos^3 x}}{\cancel{e^{-2x}}}dx=\int\frac{-\sin x}{\cos^3 x}dx=I$

$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{-x}\cos x & e^{-x}\sin x\\ -e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x & -e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x\end{vmatrix}=e^{-2x}(-\cos x\sin x+\cos^2 x$

$+\cos x\sin x+\sin^2 x)=e^{-2x}$

$I=\int\cos^{-3}x(-\sin x)dx=\int w^{-3}dw=\frac{w^{-2}}{-2}=\frac{\cos^{-2}x}{-2}=\boxed{\frac{-1}{2\cos^2 x}=u}$

$\cos x=w\rightarrow -\sin x\,dx=dw$

$v=\int\frac{y_1 f_3}{W}dx=\int\frac{\cancel{e^{-x}}\cos x\times\frac{e^{-x}}{\cos^3 x}}{\cancel{e^{-2x}}}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=+\tan x$

$y_p=uy_1+vy_2=\frac{-1}{2\cos^2 x}e^{-x}\cos x+\tan x\, e^{-x}\sin x=e^{-x}\left[\frac{-1}{2\cos x}+\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]$

$=e^{-x}\left[\frac{-1+2\sin^2 x}{2\cos x}\right]=e^{-x}\left[\frac{-\cos 2x}{2\cos x}\right]$

$$\boxed{y=y_h+y_p=Ae^{-x}\cos x+Be^{-x}\sin x+e^{-x}\left[\frac{-\cos 2x}{2\cos x}\right]}$$

مثال: جواب عمومی $y''+2y'+y=4e^{-x}\ln x$ را بیابید.

$t^2+2t+1=0\rightarrow (t+1)^2=0\rightarrow t=-1,-1\rightarrow y_h=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$

$\rightarrow y_1=e^{-x},\ y_2=xe^{-x},\ W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x}\\ -e^{-x} & e^{-x}-xe^{-x}\end{vmatrix}$

$=e^{-2x}(1-\cancel{x}+\cancel{x})=e^{-2x},\ u=\int-\frac{y_2 f_3}{W}dx=\int\frac{-x\cancel{e^{-x}}\,4\,\cancel{e^{-x}}\ln x}{\cancel{e^{-2x}}}dx$

$=-4\int x\underbrace{\ln x}_{v}\,dx=-4\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}\right]=-4\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]=-2x^2\ln x+x^2$

$x\,dx=dv\rightarrow v=\frac{x^2}{2}$

$$v = \int \frac{y_1 f_{(x)}\,dx}{W} = \int \frac{e^{-x}\cdot 4e^{-x}\ln x}{e^{-2x}}\,dx = 4\int \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = 4\left[x\ln x - \int x\frac{dx}{x}\right]$$

$$= 4\left[x\ln x - x\right] \qquad y_p = u y_1 + v y_2 = \left[x^2 - 2x^2\ln x\right]e^{-x} + 4\left[x\ln x - x\right]xe^{-x}$$

$$= -3x^2e^{-x} + 2x^2\ln x\, e^{-x}$$

$$\boxed{y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 2x^2 \ln x\, e^{-x}}$$

جواب آخر

تمرین سوم: اگر $y_1 = x$ و $y_2 = x^2$ جوابهای ~~...~~ مستقل همگن معادله

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = \frac{4}{x}$$

باشند جواب عمومی این معادله را بدست آورید.

۱۲ شب . فردا