

جلبہ یقیناً ۱۵، ۱۸
 حل نم ← حالت خاص

$$y'' + (a)y' + (b)y = 0$$

اعداد ثابت

$$y = e^{tx} \rightarrow y' = t e^{tx}, y'' = t^2 e^{tx} \rightarrow t^2 (t^2 + at + b) = 0 \rightarrow t^2 + at + b = 0$$

معادله نم

$\Delta > 0 \rightarrow t_1, t_2, t_3 \rightarrow y = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x}$

$\Delta = 0 \rightarrow t = t_1, t_1 \rightarrow y = c_1 e^{t_1 x} + c_2 x e^{t_1 x} = (c_1 + c_2 x) e^{t_1 x}$

$\Delta < 0 \rightarrow t = p \pm iq \rightarrow y = e^{px} (c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)$

یہاں اصول خاص مرتبہ n:

(ریشه ها/اعداد نمبر t_1, t_2, \dots, t_m)

طالت اولم: معادله نمبر m ریشه حقیقی یا تہہ دو یا تہہ طالت

$$y = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x} + \dots + c_m e^{t_m x}$$

$$y''' - y'' = 0$$

مسئلہ: جواب معادله نمبر یفرانسٹی

$$t^3 - t^2 = 0 \rightarrow t(t^2 - t) = 0 \rightarrow t = 0, 1, 1 \rightarrow y = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 e^{1x} = c_1 + c_2 x + c_3 e^x$$

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

مسئلہ: جواب معادله نمبر

$$t^3 - 2t^2 - 3t = 0 \rightarrow t(t^2 - 2t - 3) = 0 \rightarrow t(t-3)(t+1) = 0 \rightarrow t = 0, 3, -1$$

$$\rightarrow y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-1x} = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-x}$$

حالت خاص: معادله نمبر n ریشه حقیقی یا تہہ m یا m ریشه دو یا تہہ طالت خاص

ریشه: $t_1, t_2, \dots, t_m, t_m, \dots, t_m$

$$y = c_1 e^{t_1 x} + c_2 x e^{t_2 x} + c_3 x^2 e^{t_3 x} + \dots + c_m x^{m-1} e^{t_m x} + c_{m+1} e^{t_{m+1} x} + \dots + c_n e^{t_n x}$$

مسئلہ: جواب معادله نمبر یفرانسٹی

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0$$

$$t^4 - 2t^2 + 1 = 0 \rightarrow (t^2 - 1)^2 = 0 \rightarrow t = 1, -1, 1, -1 \rightarrow y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x}$$

حالت خاص: معادله نمبر n ریشه حقیقی یا تہہ مختلف

قرن کنیا $t_1 = p + iq$ و $t_2 = p - iq$ و ریشه حقیقی یا تہہ (t_3, t_4, \dots, t_n)

$$y = e^{px} (c_1 \cos qx + c_2 \sin qx) + c_3 e^{t_3 x} + c_4 e^{t_4 x} + \dots + c_n e^{t_n x}$$

مسئلہ: جواب معادله نمبر یفرانسٹی

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \rightarrow (t-2)^2 = 0 \rightarrow t = 2, 2 \rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

حالت کلی: $y = c_1 e^{\lambda x} + e^{\lambda x} (c_2 \cos \mu x + c_3 \sin \mu x)$
 حالت خاص: $p = c_1 t^k + c_2 t^k + \dots$ معادله $y'' + p y' + q y = 0$ معادله $y'' + p y' + q y = 0$

$$y = e^{px} [(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_m x^{m-1}) \cos qx + (d_1 + d_2 x + \dots + d_n x^{n-1}) \sin qx]$$

مسئله ۲: جواب عمومی $y'' + y - y'' - y = 0$ را بیابید.

$$t^4 + t^2 - t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^4 - 1 = 0 \Rightarrow (t^2 + 1)(t^2 - 1) = 0$$

$$(t^2 + 1)(t^2 - 1)(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow (t^2 + 1)(t - 1)(t + 1) = 0 \Rightarrow t = 1, -1, \pm i, \pm i$$

$$\rightarrow y = c_1 e^{-ix} + c_2 e^{ix} + e^{0x} [(c_3 + c_4 x) \cos x + (c_5 + c_6 x) \sin x]$$

نکته: اعداد $D = \frac{d}{dx}$ در عبارات نیراسته درشت

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, D^3 = \frac{d^3}{dx^3}, \dots, D^n = \frac{d^n}{dx^n} \quad Dy = \frac{dy}{dx}$$

مسئله ۳: جواب عمومی معادله $y'' + y = 0$ را بیابید.
 ریشه‌های $D = \pm i$ و $D = \pm i$ در عبارت $D(D^2 + 1)y = 0$ ظاهر می‌شوند.

$$D = 0, D^2 + 1 = 0 \Rightarrow D = \pm i, \pm i$$

$$\rightarrow y = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix} + (c_3 \cos x + c_4 \sin x) + (c_5 + c_6 x + c_7 x^2) e^{0x}$$

نکته: جواب عمومی معادله $y'' + y = 0$ را بیابید.
 عبارت $y'' + y = 0$ را بیابید.

$$D(D-1)^k (D^2+k)^l (D^2+k^2)^m (D+1)^n y = 0$$

$$D^2 + k = 0 \rightarrow D = \pm \sqrt{-k} = \pm i\sqrt{k}$$

$$D^2 + kD + k = 0 \Rightarrow D = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4k}}{2} = \frac{-k \pm k\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-k \pm k(-i)}{2} = -\frac{k}{2} \pm \frac{k}{2}i$$

$$\rightarrow y = (c_1 + c_2 x) e^{0x} + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2) e^{0x} + c_6 e^{-ix} + e^{ix} [(c_7 + c_8 x) \cos 2x + (c_9 + c_{10} x) \sin 2x] + e^{-x} [c_{11} \cos x + c_{12} \sin x]$$

نکته: جواب عمومی معادله $y'' - 4y' + 4y = 0$ را بیابید.
 $y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 4$

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow (t-2)^2 = 0 \Rightarrow t = 2, 2 \Rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{2x}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$\rightarrow y' = (2c_1 + 2c_2 x) e^{2x} + (c_2 + 2c_3 x) e^{2x} \Rightarrow c_2 + c_3 = 2 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$\rightarrow \dots \Rightarrow c_3 = 1 \Rightarrow y = e^{2x} + x e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$$

حیاب مادتات نامکن مرتبہ

$$y'' + ay' + by = r(x)$$

$$y = y_h \text{ (جواب عمومی متجانس)} + y_p \text{ (جواب خصوصی متجانس)}$$

$$y_p = x^m \gamma(x) \text{ (معمولاً } \gamma(x) \text{ ہے جہاں } m \text{ قدرتی عدد ہے)}$$

حالت اول: اگر $r(x)$ پیمائش یا
معدلات