جلسه چهارم درس معادلات ۹۸ _ ۲ _ ۲۶

فصل ۱: معادلات مرتبه اول

- خطی
- برنولی
- همگن
- تفکیک پذیری
- کامل
- فاکتور انتگرال ساز

ادامه بحث فاکتور انتگرال ساز

حالت سوم فاکتور انتگرال ساز: $\frac{1}{yN-xM}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(xy) = f(z)$ ، $z=xy$ در این صورت

$F(z) = e^{\int f(z)\,dz}$ فاکتور انتگرال ساز

مثال: معادله دیفرانسیل ~~...~~ را حل کنید.

$$(y+x^4y^2)dx + x\,dy = 0$$

$M = y+x^4y^2 \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1+2x^4y$

$N = x \longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 1$

$$\frac{1}{yN-xM}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{\cancel{yx}-\cancel{xy}-x^5y^2}(\cancel{1}+2x^4y-\cancel{1}) = \frac{2x^4y}{-x^5y^2} = \frac{-2}{xy} = \frac{-2}{z}$$

$$F(z) = e^{\int\frac{-2}{z}dz} = e^{-2\int\frac{dz}{z}} = e^{-2\ln z} = e^{\ln z^{-2}} = z^{-2} = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2y^2}$$

$M_{\text{جدید}} = \frac{1}{x^2y^2}(y+x^4y^2) = \frac{1}{x^2y} + x^2$

$N_{\text{جدید}} = \frac{1}{x^2y^2}\times x = \frac{1}{xy^2}$

$$\longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2y} + x^2 \longrightarrow u \overset{(3)}{=} \frac{-1}{xy} + \frac{x^3}{3} + f(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{xy^2} \quad (2) \end{cases}$$

$\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{xy^2} + f'(y) \quad (1) \xrightarrow{(1)=(2)} f'(y) = 0 \longrightarrow f(y) = c$

$\xrightarrow{(3)} \boxed{u = \frac{-1}{xy} + \frac{x^3}{3} + c = 0}$

نکته: برای تعیین فاکتور انتگرال ساز مثل $F = x^\alpha y^\beta$ به شرح زیر برای مثالها به کار بگیرید.

مثال: یک فاکتور انتگرال ساز برای معادله دیفرانسیل $y(2-3xy)dx - x\,dy = 0$ را پیدا کنید.

ابتدا $F = x^\alpha y^\beta$ را در دو طرف معادله ضرب می‌کنیم

$$(\underbrace{2x^\alpha y^{\beta+1} - 3x^{\alpha+1}y^{2+\beta}}_{M})dx - \underbrace{x^{\alpha+1}y^\beta}_{N} dy = 0 \xrightarrow{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}} 2(\beta+1)x^\alpha y^\beta - 3(\beta+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1}$$

$$= -(\alpha+1)x^\alpha y^\beta$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2(\cancel{\beta+1}) = -(\alpha+1) \longrightarrow -2 = -(\alpha+1) \longrightarrow \boxed{\alpha = 1} \\ -3(\beta+2) = 0 \longrightarrow \boxed{\beta = -2} \longrightarrow F = x^\alpha y^\beta = x^1y^{-2} = \frac{x}{y^2} \end{cases}$$

مسیرهای متعامد:

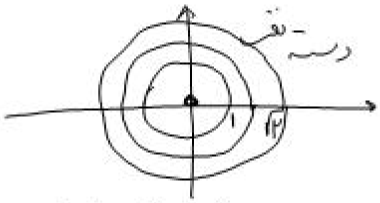
$$\begin{cases} x^2+y^2=c \\ xy+\ln xy+x^2+xy^3=c \end{cases}$$

مثال: مسیرهای متعامد دسته منحنی $x^2+y^2=c$ را پیدا کنید.

$c=0 \to x^2+y^2=0 \to x^2=-y^2 \to$ امکان ندارد $x=y=0$

$c=1 \to x^2+y^2=1 \to$ دایره

$c=2 \to x^2+y^2=2 \to$ دایره



$x^2+y^2=c \to 2x+2yy' \overset{①}{=} 0 \to$ $y'=m$ شیب خط مماس بر منحنی

مسیر متعامد از رابطه $m\cdot m_1=-1$ بدست می‌آید که m_1 شیب مسیر متعامد است

$m_1=\frac{-1}{m}=\frac{-1}{y'}$

حال در رابطه ① بجای y'، $\frac{-1}{y'}$ قرار دهید تا مسیر متعامد دسته منحنی بدست آید

$\xrightarrow{①} 2x+2y\left(\frac{-1}{y'}\right)=0 \to 2x=\frac{2y}{y'} \to x=\frac{y\,dx}{dy} \to x\,dy=y\,dx$

$\to \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \to \ln y=\ln x+\ln c_1 \to \ln y=\ln(xc_1) \to \boxed{y=xc_1}$ مسیر متعامد

پوش منحنی: منحنی با معادله $F(x,y,c)=0$ است که بر دسته منحنی‌های مسئله در هر نقطه مماس است و برای بدست آوردن آن از رابطه

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial c}=0 \end{cases}$$ بدست می‌آید.

مثال: پوش دسته منحنی با نقاط غیرعادی $(x-c)^2+y^2=4$ را پیدا کنید.

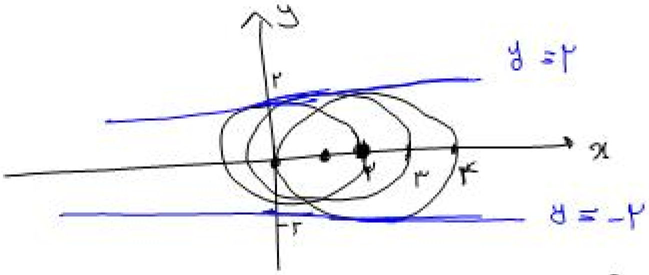
$$\begin{cases} (x-c)^2+y^2=4 \quad ① \\ 2(x-c)(-1)=0 \end{cases} \to x-c=0 \to x=c \xrightarrow{①} (\underbrace{x-x}_{0})^2+y^2=4 \to y^2=4 \to$$

$\boxed{y=\pm 2}$ پوش دسته منحنی

$c=0 \to x^2+y^2=4$

$c=1 \to (x-1)^2+y^2=4$

$c=2 \to (x-2)^2+y^2=4$



مثال: پوش دسته منحنی $y=cx+c^2+1$ را پیدا کنید.

$$\begin{cases} y=cx+c^2+1 \quad ① \\ x+2c=0 \to c=-\frac{x}{2} \end{cases} \xrightarrow{①} y=-\frac{x}{2}\cdot x+\left(-\frac{x}{2}\right)^2+1 \to y=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}+1$$

$\to \boxed{y=-\frac{x^2}{4}+1}$ معادله پوش منحنی

فصل ۲: حل معادلات مرتبه دوم و بالاتر:

$y'' + 4yy' + 3x\cos y = 0$

روش‌های حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم در حالت خاص

الف: معادله مرتبه دوم به صورت $F(x, y'') = 0$ باشد:

مثال: معادله $y'' = 2x$ را حل کنید.

$$y'' = 2x \xrightarrow{\text{انتگرال}} y' = x^2 + c_1 \xrightarrow{\text{انتگرال}} \boxed{y = \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2}$$

نکته: این حالت به معادلات مرتبه بالاتر قابل تعمیم است.

مثال: معادله $y^{(4)} = \sin x$ را حل کنید.

$$y^{(4)} = \sin x$$

$$\downarrow$$

$$y''' = -\cos x + c_1 \longrightarrow y'' = -\sin x + c_1 x + c_2 \longrightarrow y' = \cos x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$\longrightarrow \boxed{y = \sin x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4}$$

ب: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم فاقد تابع y به صورت $F(x, y', y'') = 0$ داشته باشیم با تغییر متغیر $y' = p$ حل می‌کنیم. (در واقع معادله به یک معادله مرتبه اول تبدیل می‌شود)

مثال: معادله $y'' + x(y')^2 = 0$ ① را حل کنید.

$$y' = p \to y'' = p' \xrightarrow{①} p' + x(p)^2 = 0 \longrightarrow p' = -xp^2 \to \frac{dp}{dx} = -xp^2$$

$$\longrightarrow \frac{dp}{p^2} = -x\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} \frac{-1}{p} = \frac{-x^2}{2} + c_1 \longrightarrow \frac{-1}{y'} = \frac{-x^2}{2} + c_1$$

$$\longrightarrow \frac{-dx}{dy} = \frac{-x^2}{2} + c_1 \longrightarrow \frac{dx}{-x^2/2 + c_1} = -dy \longrightarrow \ldots$$

$$\frac{dx}{(\sqrt{c_1} - \frac{x}{\sqrt{2}})(\sqrt{c_1} + \frac{x}{\sqrt{2}})} = -dy \longrightarrow \left(\frac{A}{\sqrt{c_1} - \frac{x}{\sqrt{2}}} + \frac{B}{\sqrt{c_1} + \frac{x}{\sqrt{2}}}\right)dx = -dy$$

مثال: معادله دیفرانسیل $xy'' + y' = 1$ را حل کنید.

$$y' = p \to xp' + p = 1 \xrightarrow{\div x} \underbrace{p' + \frac{1}{x}p = \frac{1}{x}}_{\text{معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی}}$$

$$\longrightarrow p = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[\int \frac{1}{x} e^{\int \frac{1}{x}dx} dx + c_1\right] = e^{-\ln x}\left[\int \frac{1}{x} e^{\ln x} dx + c_1\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[\int \frac{1}{\cancel{x}}\cdot \cancel{x}\, dx + c_1\right] = \frac{1}{x}(x + c_1) \longrightarrow p = 1 + \frac{c_1}{x} \longrightarrow y' = 1 + \frac{c_1}{x}$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{c_1}{x} \longrightarrow dy = (1 + \frac{c_1}{x})dx \longrightarrow \boxed{y = x + c_1\ln x + c_2}$$

پ: اگر معادله دیفرانسیل فاقد متغیر مستقل یعنی x باشد یعنی به صورت $F(y, y', y'')=0$

$$y'=p \to y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\underbrace{\frac{dp}{dy}\,p}_{\text{خیلی مهم}}$$

مثال: معادله $yy''+(y+1)y'^2=0$ را حل کنید.

$$y'=p,\ y''=p\frac{dp}{dy}\xrightarrow{\text{در معادله}} yp\frac{dp}{dy}+(y+1)p^2=0 \to p\left(y\frac{dp}{dy}+(y+1)p\right)=0$$

$$\to \begin{cases} p=0 \to y'=0 \to \boxed{y=c} \\ y\frac{dp}{dy}+(y+1)p=0 \to y\frac{dp}{dy}=-(y+1)p \to \int\frac{dp}{-p}=\int\frac{(y+1)\,dy}{y} \end{cases}$$

$$\to -\ln p = y+\ln y + c_1 \to -\ln y - \ln p = c_1+y \to$$

$$-\ln(yp)=c_1+y \to \ln(yp)=-c_1-y$$

$$\to yp=\underbrace{e^{-c_1}}_{D}e^{-y} \to yp=De^{-y} \to y\frac{dy}{dx}=De^{-y} \to \frac{y\,dy}{e^{-y}}=D\,dx$$

$$\to \int ye^{y}\,dy=\int D\,dx \to \boxed{ye^{y}-e^{y}=Dx+c_2}$$

y	$+\ e^y$
1	$-\ e^y$
0	e^y

مثال: نقطه ... معادله $y(x)$ را طوری پیدا کنید که $y''=12\sqrt{y}$ در مبدا مختصات مماس بر محور x ها باشد.

$$y'=p \to y''=p\frac{dp}{dy} \to p\frac{dp}{dy}=12\sqrt{y}$$

$$\to p\,dp=12\sqrt{y}\,dy \to \frac{p^2}{2}=\cancel{12}\frac{y^{3/2}}{3/2}+c_1 \to \frac{y'^2}{2}\overset{①}{=}8y^{3/2}+c_1$$

مماس بر محور x ها است

شیب محور x ها صفر است

$m=y'=0,\ x=0, y=0$

$$0=8\times 0+c_1 \to c_1=0 \xrightarrow{①} \frac{y'^2}{2}=8y^{3/2} \to y'^2=16y^{3/2}$$

$$\to y'=\sqrt{16y^{3/2}}=4y^{3/4} \to \frac{dy}{dx}=4y^{3/4} \to \frac{dy}{y^{3/4}}=4\,dx$$

$$\to y^{-3/4}\,dy=4\,dx \to 4y^{1/4}\overset{②}{=}4x+c_2 \xrightarrow[y=0]{x=0} 0=0+c_2 \to \boxed{c_2=0}$$

زیرا منحنی از مبدا مختصات می‌گذرد

$$② \to \cancel{4}y^{1/4}=\cancel{4}x \to x=y^{1/4} \to \boxed{y=x^4}$$ جواب آخر

نکته: اگر معادله $F(x,y,y',y'')=0$ نسبت به y, y', y'' همگن باشد یعنی

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^n F(x,y,y',y'')$$

از تغییر متغیر $y=e^{\int z(x)dx}$ استفاده می‌شود. (z تابعی از x است)

مثال: معادله $\underbrace{yy''-(y')^2-4xy^2}_{F(x,y,y',y'')}=0$ ① را حل کنید.

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=(\lambda y)(\lambda y'')-(\lambda y')^2-4x(\lambda y)^2=\lambda^2(yy''-y'^2-4xy^2)$$

$$=\lambda^2 F(x,y,y',y'') \longrightarrow \text{همگن است}$$

$$y=e^{\int z dx} \longrightarrow y'=z e^{\int z dx} \longrightarrow y''=z' e^{\int z dx}+z^2 e^{\int z dx}=(z'+z^2)e^{\int z dx}$$

$$\xrightarrow{①} e^{\int z dx}(z'+z^2)e^{\int z dx}-(z e^{\int z dx})^2-4x(e^{\int z dx})^2=0$$

$$\longrightarrow (e^{\int z dx})^2\left[z'+\cancel{z^2}-\cancel{z^2}-4x\right]=0 \longrightarrow z'-4x=0 \longrightarrow z'=4x$$

$$\longrightarrow \frac{dz}{dx}=4x \longrightarrow dz=4x\,dx \longrightarrow z=\frac{4x^2}{2}+c_1=2x^2+c_1$$

$$\longrightarrow y=e^{\int z dx}=e^{\int(2x^2+c_1)dx}=e^{x^3+c_1x+c_2} \longrightarrow y=e^{x^3+c_1x+c_2}$$

$$\xRightarrow{e^{c_2}=D} \boxed{y=De^{x^3+c_1x}}$$

سوال کوئیز دوم - نام و نام خانوادگی:

معادله $y''-(y')^2+y(y')^3=0$ را حل کنید. تا ۱۲ شب پنجشنبه مهلت هست

و نتیجه را تحویل بدهید.

فصل دوم:
- معادلات خاص ✓
- معادلات مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت

معادلات مرتبه بالاتر خطی با ضرایب ثابت

سوال کوئیز بالا غیرخطی است

$x^2y''+xy'+4y=0$ خطی

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را خطی گوییم اگر به فرم $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$ باشند. اگر $r(x)=0$

معادله دیفرانسیل را همگن نیز گوییم

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت به فرم $y''+b_1y'+b_2y=0$ است.

معادله مشخصه

$$\xrightarrow[\substack{y'=te^{tx}\\ y''=t^2e^{tx}}]{y=e^{tx}} e^{tx}(t^2+b_1t+b_2)=0 \longrightarrow t^2+b_1t+b_2=0$$

اگر Δ معادله مشخصه مثبت باشد معادله مشخصه دو ریشه متمایز t_1 و t_2 دارد.

$y=e^{tx} \longrightarrow y=c_1e^{t_1x}+c_2e^{t_2x}$ جواب عمومی

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+2y'-15y=0$ را بدست آورید.

$t^2+2t-15=0 \longrightarrow \Delta=2^2-4(-15)=4+60=64 \longrightarrow \sqrt{\Delta}=8$

$t=\frac{-2\pm 8}{2} \to -5,\ 3 \longrightarrow \boxed{y=c_1e^{3x}+c_2e^{-5x}}$

اگر Δ معادله مشخصه صفر باشد معادله مشخصه دارای جواب تکراری t_1 خواهد بود $t=t_1=t_2$

جواب عمومی معادله به صورت $y=(c_1+c_2x)e^{t_1x}$ خواهد بود

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-6y'+9y=0$ را بدست آورید.

$t^2-6t+9=0 \longrightarrow (t-3)^2=0 \longrightarrow t=3,3 \longrightarrow \boxed{y=(c_1+c_2x)e^{3x}}$

اگر Δ معادله مشخصه منفی باشد معادله مشخصه دارای دو ریشه مختلط است

$\sqrt{-1}=i$

$t_1=p+iq,\ t_2=p-iq \qquad e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

نهایتاً فرم جواب به صورت $\boxed{y=e^{px}\left[A\cos qx+B\sin qx\right]}$ خواهد بود

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+2y'+10y=0$ را بدست آورید.

$t^2+2t+10=0 \qquad \Delta=2^2-4(10)=4-40=-36 \longrightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{-36}=\sqrt{-1}\sqrt{36}$

$\to \sqrt{\Delta}=6i$ و $t=\frac{-2\pm 6i}{2}=-1\pm 3i \longrightarrow \boxed{y=e^{-x}\left[A\cos 3x+B\sin 3x\right]}$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-4y'+5y=0$ را بدست آورید.

$t^2-4t+5=0 \longrightarrow \Delta=16-20=-4 \to \sqrt{\Delta}=2i$

$t=\frac{4\pm 2i}{2}=2\pm i \longrightarrow \boxed{y=e^{2x}\left[A\cos x+B\sin x\right]}$