جلسه دوم درس معادلات ← روش حل معادلات خطی

← معادله برنولی و حل

معادله برنولی

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \xrightarrow{\times y^{-n}} y^{-n}y' + p(x)y^{-n+1} = q(x)$$

$$\xrightarrow[u' = (1-n)y^{-n}y']{u = y^{-n+1}} \frac{u'}{1-n} + p(x)u = q(x) \to u' + \underbrace{p(x)(1-n)}_{P(x)}u = \underbrace{q(x)(1-n)}_{Q(x)}$$

$$\to u' + P(x)u = Q(x) \longrightarrow$$ معادله خطی ← از روش خطی حل می‌شود.

مثال: معادله دیفرانسیل $y' - y = xy^2$ را حل کنید.

$$\xrightarrow{\times y^{-2}} y^{-2}y' - y^{-1} = x \xrightarrow[(-1)y^{-2}y' = u']{y^{-1} = u} -u' - u = x \to u' + u = -x \to$$ معادله خطی

$$\to p(x) = 1,\ q(x) = -x \to u = e^{-\int 1\,dx}\left[\int (-x)e^{\int 1\,dx}dx + c\right]$$

$$= e^{-x}\left[\int -x e^{x}dx + c\right] = e^{-x}\left[\left[-xe^{x} + e^{x}\right] + c\right]$$

$$\begin{array}{c|c} & \\ -x & e^{x} \\ -1 & e^{x} \\ 0 & e^{x} \end{array}$$

$$\Rightarrow u = -x + 1 + ce^{-x} \to \boxed{\frac{1}{y} = -x + 1 + ce^{-x}}$$

مثال: معادله دیفرانسیل $(2xy^5 - y)dx + 2x\,dy = 0$ را حل کنید.

برنولی

$$\xrightarrow{\div dx} 2xy^5 - y + 2x\frac{dy}{dx} = 0 \xrightarrow{\div 2x} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = -y^5 \to$$

$$\xrightarrow{\times y^{-5}} y^{-5}y' - \frac{1}{2x}y^{-4} = -1 \xrightarrow[u' = -4y^{-5}y']{u = y^{-4}} \frac{1}{-4}u' - \frac{1}{2x}u = -1 \xrightarrow{\times(-4)}$$

$$u' + \frac{2}{x}u = 4 \longrightarrow$$ خطی $p(x) = \frac{2}{x}$ و $q(x) = 4$

$$u = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[\int 4e^{\int \frac{2}{x}dx}dx + c\right] = e^{-2\ln x}\left[\int 4e^{2\ln x}dx + c\right]$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\int 4x^2dx + c\right] = \frac{1}{x^2}\left[\frac{4x^3}{3} + c\right] \to u = \frac{4}{3}x + \frac{c}{x^2}$$

$$\to \boxed{\frac{1}{y^4} = \frac{4}{3}x + \frac{c}{x^2}}$$

نکته: یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌تواند نسبت به x به عنوان تابعی از y نیز برنولی باشد، در این صورت شکل کلی آن $\frac{dx}{dy} + x f(y) = x^n g(y)$ است.

سوال: معادله دیفرانسیل $y' = \frac{3x^2}{x^3+y+1}$ را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{x^3+y+1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^3+y+1}{3x^2} \longrightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{1}{3}x = \frac{y+1}{3x^2}$$

برنولی $\xrightarrow{\times x^2}$

$$x^2\frac{dx}{dy} - \frac{1}{3}x^3 = \frac{y+1}{3} \xrightarrow[3x^2\frac{dx}{dy}=\frac{du}{dy}]{x^3=u} \frac{1}{3}\frac{du}{dy} - \frac{1}{3}u = \frac{y+1}{3} \longrightarrow \frac{du}{dy} - u = y+1$$

خطی

$$\longrightarrow u = e^{-\int(-1)dy}\left[\int (y+1)e^{\int(-1)dy}dy + c\right] = e^{y}\left[\int (y+1)e^{-y}dy + c\right]$$

$$= e^{y}\left[-(y+1)e^{-y} - e^{-y} + c\right] = -y-1-1+ce^{y} \longrightarrow \boxed{x^3 = -y-2+ce^{y}}$$

$y+1$	e^{-y}
1	$+\ -e^{-y}$
0	$-\ +e^{-y}$

سوال: معادله دیفرانسیل $y' = \frac{2x}{x^2\cos y + \sin 2y}$ را حل کنید.

برنولی

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2\cos y + \sin 2y}{2x} \longrightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{\cos y}{2}x = \frac{\sin 2y}{2x} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\times x} x\frac{dx}{dy} - \frac{\cos y}{2}x^2 = \frac{\sin 2y}{2} \xrightarrow[2x\frac{dx}{dy}=\frac{du}{dy}]{x^2=u} \frac{1}{2}\frac{du}{dy} - \frac{\cos y}{2}u = \frac{\sin 2y}{2}$$

$\longrightarrow$ معادله خطی $u = e^{-\int -\cos y\,dy}\left[\int \sin 2y\, e^{\int -\cos y\,dy}dy + c\right]$

$$= e^{\sin y}\left[\int \underbrace{2\sin y\cos y\, e^{-\sin y}dy}_{I} + c\right] = e^{\sin y}\left[-2\sin y\, e^{-\sin y} - 2e^{-\sin y} + c\right]$$

$$v = \sin y \to dv = \cos y\,dy$$

$$\to u = -2\sin y - 2 + ce^{\sin y} \longrightarrow \boxed{x^2 = -2\sin y - 2 + ce^{\sin y}}$$

$$I = 2\int v e^{-v}dv = 2\left(-ve^{-v} - e^{-v}\right)$$

v	e^{-v}
1	$+\ -e^{-v}$
0	$-\ +e^{-v}$

نکته: معادله دیفرانسیل $f'(y)\frac{dy}{dx}+f(y)p(x)=q(x)$ با تغییر متغیر $u=f(y)$ تبدیل به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌شود

$$\frac{du}{dx}=f'(y)\frac{dy}{dx} \qquad \frac{du}{dx}+p(x)u=q(x)$$

مثال: معادله دیفرانسیل $y'\cos y+\sin y=x+1$ را حل کنید.

حل →

$$\sin y=u \to (\cos y)y'=u' \to u'+u=x+1$$

$$u=e^{-\int 1dx}\left[\int(x+1)e^{+\int 1dx}dx+c\right]=e^{-x}\left[\int(x+1)e^{x}dx+c\right]$$

$$=e^{-x}\left[(x+1)e^{x}-e^{x}+c\right]\Rightarrow u=(x+1)-1+ce^{-x}\to\boxed{\sin y=x+ce^{-x}}$$

$x+1$	e^x
1	e^x
0	$-e^x$

حل معادلات مرتبه اول:
- خطی ✓
- برنولی ✓
- تفکیک‌پذیر ○

معادلات تفکیک‌پذیر

$$y'=f(x,y)=f_1(x)f_2(y)\to\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y)\to\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}}\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx$$

مثال: معادله دیفرانسیل $y'=e^{x+y}$ را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx}=e^{x}e^{y}\to\frac{dy}{e^{y}}=e^{x}dx\to e^{-y}dy=e^{x}dx\xrightarrow{\text{انتگرال}}\boxed{-e^{-y}=e^{x}+c}$$

مثال: معادله دیفرانسیل $y'=\frac{x(1+y)}{y(x+2)}$ را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y}{y}\cdot\frac{x}{x+2}\to\int\frac{y}{1+y}dy=\int\frac{x}{x+2}dx\to\int\left(1-\frac{1}{1+y}\right)dy=\int\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx$$

$x \div (x+2)$: $x-(x+2)=-2$, خارج قسمت 1 ؛ $y \div (y+1)$: $y-(y+1)=-1$, خارج قسمت 1

$$\to\boxed{y-\ln|1+y|=x-2\ln|x+2|+c}$$

مثال: معادله دیفرانسیل $y'=\frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$ را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{y}\times\frac{1}{x(1+x^2)}\to\frac{y\,dy}{1+y^2}=\frac{1\,dx}{x(1+x^2)}\to\frac{y\,dy}{1+y^2}=\left(\frac{\overset{1}{A}}{x}+\frac{\overset{-1}{B}x+\overset{0}{C}}{1+x^2}\right)dx$$

$$\to 1=A(1+x^2)+x(Bx+C)\to$$

ضریب x^2: $0=A+B\to B=-1$

ضریب x: $0=C$

ضریب عدد ثابت: $1=A$

$$\to\frac{1}{2}\ln|1+y^2|=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+\ln c\to\ln\sqrt{1+y^2}=\ln\frac{|x|c}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\to\boxed{\sqrt{1+y^2}=\frac{c|x|}{\sqrt{1+x^2}}}\to\boxed{1+y^2=\frac{c^2x^2}{1+x^2}}$$

نکته: معادلاتی به فرم ① $y'=f(ax+by+c)$ را می‌توان با استفاده از تغییر متغیر به معادله تفکیک‌پذیر تبدیل کرد.

$$u=ax+by+c \to u'=a+by' \to y'=\frac{u'-a}{b}$$

$$\xrightarrow{①} \frac{u'-a}{b}=f(u) \to u'=\underbrace{bf(u)+a}_{h(u)} \to \frac{du}{dx}=h(u)$$

$$\to \frac{du}{h(u)}=dx \longrightarrow \text{تفکیک‌پذیر}$$

مثال: معادله دیفرانسیل (*) $y'=\tan(x+y)-1$ را حل کنید.

$$x+y=u \to 1+y'=u' \to y'=u'-1 \xrightarrow{(*)} u'-\cancel{1}=\tan(u)-\cancel{1}$$

$$\to u'=\tan u \to \frac{du}{dx}=\tan u \xrightarrow{\text{تفکیک‌پذیر}} \int\frac{du}{\tan u}=\int dx \to \int\frac{\cos u\,du}{\sin u}=x+c$$

$$\to \ln|\sin u|=x+c \to \boxed{\ln|\sin(x+y)|=x+c} \to |\sin(x+y)|=e^{x+c}$$

مثال: معادله دیفرانسیل (**) $y'=1+\frac{1}{x-y}$ را حل کنید.

$$x-y=u \to 1-y'=u' \to y'=1-u' \xrightarrow{(**)} \cancel{1}-u'=\cancel{1}+\frac{1}{u}$$

$$\to -\frac{du}{dx}=\frac{1}{u} \to -u\,du=dx \to -\frac{u^2}{2}=x+c$$

$$\to \boxed{-\frac{(x-y)^2}{2}=x+c}$$

حل معادلات مرتبه اول:
- برنولی
- خطی
- تفکیک‌پذیر
- همگن

تعریف: تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه n گوییم هرگاه

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

$$y'=f(x,y)$$

مثال: آیا معادله $y'=xe^{x/y}$ همگن است؟

$$f(x,y)=xe^{x/y} \to f(\lambda x,\lambda y)=\lambda x e^{\frac{\lambda x}{\lambda y}}=\lambda x e^{x/y}=\lambda f(x,y)$$

پس همگن از درجه 1 است.

مثال: آیا معادله $y'=x^2+xy$ همگن است؟

$$f(x,y)=x^2+xy \to f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2+(\lambda x)(\lambda y)=\lambda^2(x^2+xy)$$
$$=\lambda^2 f(x,y)$$

پس همگن از درجه 2 است.

مثال: آیا معادله $y' = xy + 3$ همگن است؟

$f(x,y) = xy + 3 \longrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) + 3 = \lambda^2 xy + 3$

همگن نیست

حل معادلات همگن: $\boxed{v = \frac{y}{x}} \rightarrow y = vx \rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$

مثال: معادله دیفرانسیل $2xy\,dy + (x^2 - y^2)\,dx = 0$ (1) را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x^2-y^2)}{2xy} = f(x,y) \longrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \frac{-((\lambda x)^2 - (\lambda y)^2)}{2(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{-\cancel{\lambda^2}(x^2-y^2)}{2\cancel{\lambda^2}xy}$$

همگن از درجه صفر است

$\lambda^0 f(x,y) \longrightarrow$

$$y = vx \xrightarrow{(1)} 2x(vx)(v\,dx + x\,dv) + (x^2 - (vx)^2)\,dx = 0$$

$$2x(vx)(v\,dx + x\,dv) + x^2(1-v^2)\,dx = 0 \rightarrow 2v(v\,dx + x\,dv) + (1-v^2)\,dx = 0$$

$$\rightarrow 2x^2 v(v\,dx + x\,dv) + \ldots \quad 2xv\,dv = -(1+v^2)\,dx \longrightarrow \int \frac{2v\,dv}{1+v^2} = \int -\frac{dx}{x}$$

$$2xv\,dv + (1+v^2)\,dx = 0 \rightarrow$$

انتگرال‌گیری

$$\rightarrow \ln|1+v^2| = -\ln|x| + \ln c \longrightarrow \ln(1+v^2) = \ln\frac{c}{|x|}$$

$$\longrightarrow 1 + v^2 = \frac{c}{|x|} \rightarrow \boxed{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{c}{|x|}}$$

مثال: معادله دیفرانسیل ~~$2xy\,dy + (x^2 - y^2)\,dx = 0$~~ $x(y-x)\,y' = y^2$ (*) را حل کنید.

$$y' = \frac{y^2}{x(y-x)} = f(x,y) \longrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y - \lambda x)} = \frac{\cancel{\lambda^2}y^2}{\cancel{\lambda^2}x(y-x)} = f(x,y)$$

این معادله همگن از درجه صفر است.

$$y = vx \rightarrow dy = v\,dx + x\,dv \xrightarrow{(*)} x(y-x)\frac{dy}{dx} = y^2 \rightarrow$$

$$x(vx - x)\frac{v\,dx + x\,dv}{dx} = (vx)^2 \rightarrow \cancel{x^2}(v-1)\frac{v\,dx + x\,dv}{dx} = \cancel{x^2}v^2$$

$$\rightarrow (v-1)(v\,dx + x\,dv) = v^2\,dx \rightarrow (v-1)x\,dv = \cancel{v^2\,dx} - \cancel{v^2\,dx} + v\,dx$$

تفکیک متغیر

$$\rightarrow (v-1)x\,dv = v\,dx \longrightarrow \frac{(v-1)\,dv}{v} = \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \left(1 - \frac{1}{v}\right)dv = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{انتگرال}} v - \ln|v| = \ln|x| + \ln c$$

$$\rightarrow v = \ln|x| + \ln c + \ln|v| \longrightarrow v = \ln(|x|c|v|)$$

$$\rightarrow \frac{y}{x} = \ln\left(|x|c\left|\frac{y}{x}\right|\right) \rightarrow \boxed{\frac{y}{x} = \ln(c|y|)}$$

تمرین: معادله دیفرانسیل $y' = \frac{y}{x+\sqrt{xy}}$ را حل کنید.

$$f(x,y) = \frac{y}{x+\sqrt{xy}} \rightarrow f(\lambda x,\lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x+\sqrt{\lambda x \cdot \lambda y}} = \frac{\lambda y}{\lambda x+\lambda\sqrt{xy}} = \frac{\cancel{\lambda} y}{\cancel{\lambda}(x+\sqrt{xy})}$$

$= f(x,y) \longrightarrow$ همگن از درجه صفر است

$$\xrightarrow{y=vx} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+\sqrt{xy}} \longrightarrow \frac{v\,dx + x\,dv}{dx} = \frac{vx}{x+\sqrt{x(vx)}}$$

$$\rightarrow \frac{v\,dx + x\,dv}{dx} = \frac{v\cancel{x}}{\cancel{x}(1+\sqrt{v})} \rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+\sqrt{v}} \rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+\sqrt{v}} - v$$

$$\rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{\cancel{v} - \cancel{v} - v\sqrt{v}}{1+\sqrt{v}} \longrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-v\sqrt{v}}{1+\sqrt{v}} \longrightarrow \frac{1+\sqrt{v}}{-v\sqrt{v}}\,dv = \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow -(v^{-3/2} + \frac{1}{v})\,dv = \frac{dx}{x} \longrightarrow -\frac{v^{-1/2}}{-1/2} - \ln|v| = \ln|x| + \ln c \quad v^{1/2}$$

$$\longrightarrow \frac{2}{\sqrt{v}} = \ln(|x|c|v|) \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{y/x}} = \ln(|\cancel{x}|c\left|\frac{y}{\cancel{x}}\right|) \rightarrow \boxed{2\sqrt{\frac{x}{y}} = \ln(c|y|)}$$

سوال کوئیز اول: معادله دیفرانسیل $xy' + y = 2x^2y\, y'\ln y$ را حل کنید.

تا ۱۲ شب امروز

zabihi@kashanu.ac.ir

مثال: معادله دیفرانسیل $\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\,dx - (\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x})\,dy = 0$ را حل کنید.

حل:

$$y = vx \rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$$

$$v\cos v\,\underline{dx} - (\frac{1}{v}\sin v + \cos v)(v\,\underline{dx} + x\,dv) = 0$$

$$v\cos v\,dx - (\frac{1}{v}\sin v + \cos v)\,dv = 0$$

$$(\cancel{v\cos v} - \sin v - \cancel{v\cos v})\,dx = x(\frac{1}{v}\sin v + \cos v)\,dv \longrightarrow -\frac{dx}{x} = (\frac{1}{v} + \frac{\cos v}{\sin v})\,dv$$

$$-\sin v\,dx = x(\frac{\sin v}{v} + \cos v)\,dv$$

$$\rightarrow -\ln|x| + \ln c = \ln|v| + \ln|\sin v| \longrightarrow \ln\frac{c}{|x|} = \ln |\sin v\, v|$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{c}{|x|} = \left|\sin(\frac{y}{x})\frac{y}{x}\right|}$$

~~نکته: معادلات به فرم $y' = f\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right)$ همگن می باشند.~~

نکته: معادلات به فرم $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+hy+d}\right)$ همگن نمی باشد ولی قابل تبدیل به همگن است

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ex+hy+d=0 \end{cases} \longrightarrow (x_0, y_0) \longrightarrow \begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \longrightarrow$$ همگن می شود

مثال: معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+2}{x-y-4}$ (*) را حل کنید.

$$+\begin{cases} x+y+2=0 \xrightarrow{x=1} 1+y+2=0 \to \boxed{y_0=-3} \\ x-y-4=0 \end{cases}$$

$$2x-2=0 \to \boxed{x_0=1}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} X = x-1 \longrightarrow dX = dx \\ Y = y-(-3) = y+3 \longrightarrow dY = dy \end{cases}$$

$$\xrightarrow{*} \frac{dY}{dX} = \frac{(X+1)+(Y-3)+2}{(X+1)-(Y-3)-4} \longrightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y} \; (**)$$ همگن

$$Y = vX \longrightarrow dY = v\,dX + X\,dv \xrightarrow{**} \frac{v\,dX + X\,dv}{dX} = \frac{X+vX}{X-vX}$$

$$\longrightarrow \frac{v\,dX + X\,dv}{dX} = \frac{1+v}{1-v} \longrightarrow v + X\frac{dv}{dX} = \frac{1+v}{1-v}$$

$$\longrightarrow X\frac{dv}{dX} = \frac{1+v}{1-v} - v = \frac{1+\cancel{v}-\cancel{v}+v^2}{1-v} \longrightarrow X\frac{dv}{dX} = \frac{1+v^2}{1-v}$$

$$\frac{(1-v)}{1+v^2}dv = \frac{dX}{X} \longrightarrow \frac{dv}{1+v^2} - \frac{v\,dv}{1+v^2} = \frac{dX}{X} \longrightarrow \tan^{-1}v - \frac{1}{2}\ln(1+v^2)$$

$$= \ln X + c \longrightarrow \boxed{\tan^{-1}\left(\frac{y+3}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y+3}{x-1}\right)^2\right) = \ln(x-1) + c}$$

نکته: اگر دو خط موازی باشند با استفاده از تغییر متغیر $u = ax+by$ یا $u = ex+hy$ معادله تبدیل به جدا از هم می شود.

مثال: معادله دیفرانسیل $y' = \frac{x+y}{1-x-y}$ (*) را حل کنید.

$$x+y=u \longrightarrow 1+y'=u' \longrightarrow y'=u'-1 \xrightarrow{*} u'-1 = \frac{u}{1-u} \longrightarrow$$

$$u' = \frac{u}{1-u} + 1 = \frac{\cancel{u}+1-\cancel{u}}{1-u} \longrightarrow u' = \frac{1}{1-u} \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{1-u}$$

$$(1-u)\,du = dx \longrightarrow u - \frac{u^2}{2} = x + c \longrightarrow \boxed{(x+y) - \frac{(x+y)^2}{2} = x + c}$$