جلسه اول درس معادلات

فصل اول : حل معادلات مرتبه اول

فصل دوم : حل معادلات مرتبه دوم و بالاتر

فصل سوم : حل معادلات با استفاده از سری های توانی

فصل چهارم : توابع گاما

فصل پنجم حل معادلات به کمک تبدیل لاپلاس

فصل ششم : حل دستگاه های معادلات خطی

مراجع = کتابهای ① معادلات دیفرانسیل دکتر نیکوکار

② 〃 〃 دکتر کرایه چیان

حضور و غیاب سر کلاس مهم باشد در نهایت تا ۴ جلسه چشم پوشی خواهد شد

کوئیز داریم (جواب کوئیزها به این آدرس zabihi@kashanu.ac.ir ایمیل شود)

مشخصات: کوئیز اول - نام و نام خانوادگی

مقدمه ای بر درس معادلات

zabihi@kashanu.ac.ir

معادله : رابطه ای است که در آن یک تابع و مشتقاتش و متغیر مستقل آن وجود دارد $y=f(x)$

مثال:

$y'=f(x)$ $\qquad y''+y'\cos x=y^5$

$(y''')^5+y''y^2=\ln x\, y'$

$\cancel{u=f(x,y) \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=5u}$

معادلات ← معادلات دیفرانسیل معمولی یک متغیره (ode)

〃 〃 ~~جزئی~~ = چند متغیره (pde)

مرتبه معادله : بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله است

مثال:

$y'+\cos x\ln x\, y=x^2$ ← معادله مرتبه اول، درجه یک

$y'''+y''y^2+y'\ln x=e^x y$ درجه یک معادله مرتبه ۳

$(y^{(4)})^5y^2+y=x$ درجه پنج معادله مرتبه ۴

درجه معادله . توان بالاترین مشتق موجود معادله را درجه معادله گویند

فصل اول : حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول:

① $\boxed{A(x)y' + B(x)y = C(x)}$ فرم معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

مثال: $e^x y' + x^2 y = \cos x$

$A(x)(y')^2 + B(x)y^2 = C(x) \rightarrow$ معادله مرتبه اول غیرخطی

$A(x)y'y + B(x)y = C(x) \rightarrow$ " " "

$\xrightarrow[\div A(x)]{①} \boxed{y' + p(x)y = q(x)}$ $\quad p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$, $q(x) = \frac{C(x)}{A(x)}$

جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$\rightarrow \boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + c\right]} \quad ⊛$$

به خاطر نامعلوم بودن c به جواب y جواب عمومی می‌گوییم.

مثال: معادله دیفرانسیل $y' + 2y = e^x$ را حل کنید.

$p(x)=2$, $q(x)=e^x$

$$\xrightarrow{⊛} y = e^{-\int 2dx}\left[\int e^x e^{\int 2dx}dx + c\right]$$

$$= e^{-2x}\left[\int e^x e^{2x}dx + c\right]$$

$$= e^{-2x}\left[\int e^{3x}dx + c\right] = e^{-2x}\left[\frac{e^{3x}}{3} + c\right] = \frac{e^x}{3} + ce^{-2x}$$

$\rightarrow \boxed{y = \frac{e^x}{3} + ce^{-2x}}$ جواب عمومی

مثال: اگر در مثال قبل $y(0)=1$ باشد جواب خصوصی معادله را بدست آورید.

$\xrightarrow[y(0)=1]{x=0,\ y=1} 1 = \frac{e^0}{3} + ce^0 \rightarrow 1 = \frac{1}{3} + c \rightarrow c = \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{y = \frac{e^x}{3} + \frac{2}{3} e^{-2x}}$ جواب خصوصی

مثال: معادله دیفرانسیل $\tan x \frac{dy}{dx} + y = 3x\sec x$ را حل کنید.

$\xrightarrow{\div \tan x} y' + \frac{1}{\tan x}y = 3x\frac{\sec x}{\tan x} \rightarrow y' + \cot x\, y = 3x\frac{1}{\sin x}$

$\rightarrow p(x) = \cot x$, $q(x) = \frac{3x}{\sin x} \xrightarrow{⊛} y = e^{-\int \cot x\, dx}\left[\int \frac{3x}{\sin x} e^{\int \cot x\, dx}dx + c\right]$

$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(\sin x)$

$\rightarrow y = e^{-\ln(\sin x)}\left[\int \frac{3x}{\sin x} e^{\ln(\sin x)}dx + c\right]$

$$y = e^{-\ln(\sin x)}\left[\int \frac{3x}{\sin x}\,\underbrace{e^{\ln(\sin x)}}\,dx + c\right]$$

$$= e^{\ln(\sin x)^{-1}}\left[\int \frac{3x}{\cancel{\sin x}}\,\cancel{\sin x}\,dx + c\right]$$

$$= (\sin x)^{-1}\left[\int 3x\,dx + c\right]$$

$$= \frac{1}{\sin x}\left[\frac{3x^2}{2} + c\right] \longrightarrow \boxed{y = \frac{3x^2}{2\sin x} + \frac{c}{\sin x}}$$

نکته: اگر معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی نسبت به x به عنوان تابعی از y حاصل باشد و به صورت کلی آن به فرم $\frac{dx}{dy} + x\,p(y) = q(y)$ باشد لذا جواب آن

$$x = e^{-\int p(y)\,dy}\left[\int q(y)\, e^{\int p(y)\,dy}\,dy + c\right]$$

مثال: معادله دیفرانسیل $y'(x\sin y + 2\sin 2y) = 1$ را حل کنید

$$\frac{dy}{dx}(x\sin y + 2\sin 2y) = 1 \longrightarrow x\sin y + 2\sin 2y = \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy} - \sin y\, x = 2\sin 2y \longrightarrow p(y) = -\sin y,\quad q(y) = 2\sin 2y$$

$$\rightarrow x = e^{-\int -\sin y\,dy}\left[\int 2\sin 2y\, e^{\int -\sin y\,dy}\,dy + c\right]$$

$$= e^{-\cos y}\left[\int 2\sin 2y\, e^{\cos y}\,dy + c\right]$$

$$= e^{-\cos y}\left[\int 2\times 2\sin y\cos y\, e^{\cos y}\,dy + c\right]$$

$$= e^{-\cos y}\left[-4\int u\, e^{u}\,du + c\right]$$

$\cos y = u \rightarrow -\sin y\,dy = du$

مشتق	انتگرال
u	e^u
1	e^u
0	e^u

$$= e^{-\cos y}\left[-4(ue^{u} - e^{u}) + c\right]$$

$$= e^{-\cos y}\left[-4(\cos y\, e^{\cos y} - e^{\cos y}) + c\right]$$

$$\boxed{x = -4\cos y + 4 + c\,e^{-\cos y}}$$

جواب عمومی معادله

معادله برنولی

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{n}$$